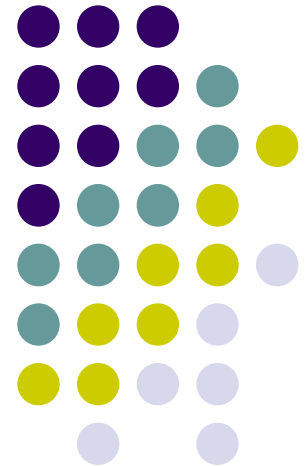
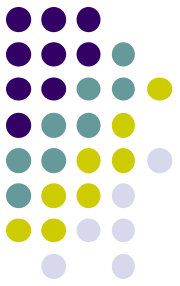


# Fundamentos da Computação 1

---

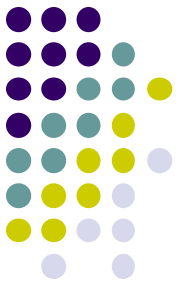




# Conteúdo

- Criando novas equivalências.
- Resolvendo questões lógicas com o método dedutivo.

# Aplicando Equivalências Lógicas

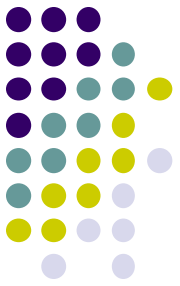


$$\sim(p \rightarrow q)$$

Aplicar a propriedade  
da condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

# Aplicando Equivalências Lógicas

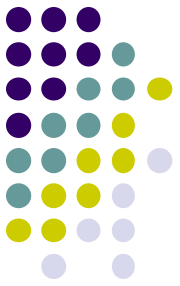


$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \quad \text{Condicional}$$

Aplicar a propriedade  
da condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

# Aplicando Equivalências Lógicas

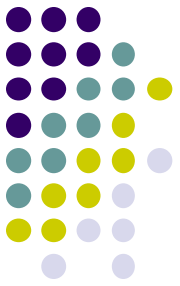


$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan}\end{aligned}$$

Aplicar a propriedade  
de De Morgan

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

# Aplicando Equivalências Lógicas

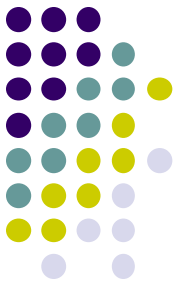


$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q && \text{Dupla Negação}\end{aligned}$$

Aplicar a propriedade  
da Dupla Negação

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

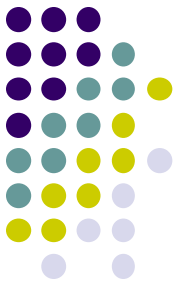
# Aplicando Equivalências Lógicas



|                         |                                   |               |
|-------------------------|-----------------------------------|---------------|
| $\sim(p \rightarrow q)$ | $\equiv \sim(\sim p \vee q)$      | Condicional   |
|                         | $\equiv \sim\sim p \wedge \sim q$ | De Morgan     |
|                         | $\equiv p \wedge \sim q$          | Dupla Negação |

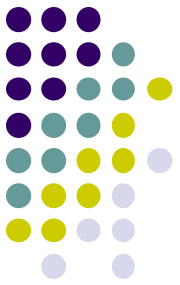
- Concluimos que  $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

# Aplicando Equivalências Lógicas



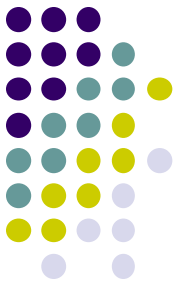
$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q && \text{Dupla Negação}\end{aligned}$$

- Concluimos que  $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- Utilizamos este método, chamado método dedutivo, para demonstrar novas equivalências.



# Resolver...

- Mostre que  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$ 
  - Dica: Aplicar as equivalências na seguinte sequência:
    - Condicional
    - Condicional
    - Associativa
    - De Morgan
    - Condicional



# Resolver...

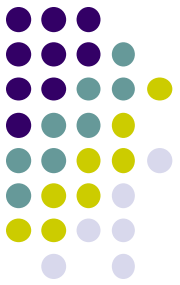
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$$

Propriedade da  
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



# Resolver...

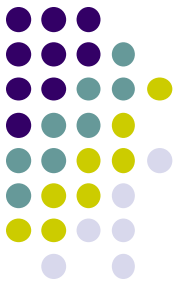
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee \underline{(q \rightarrow r)}$$

Propriedade da  
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



# Resolver...

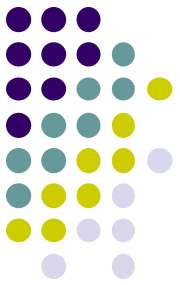
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \end{aligned}$$

Propriedade da  
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



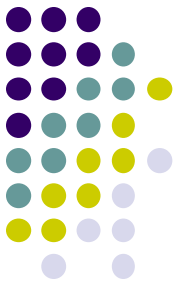
# Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \underline{\sim p \vee (\sim q \vee r)} \end{aligned}$$

Propriedade Associativa  
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



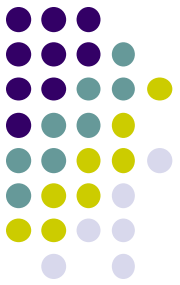
# Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \end{aligned}$$

Propriedade Associativa  
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



# Resolver...

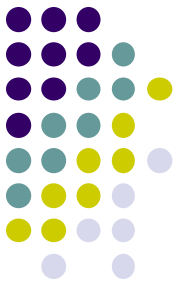
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \end{aligned}$$

Leis de De Morgan

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional



# Resolver...

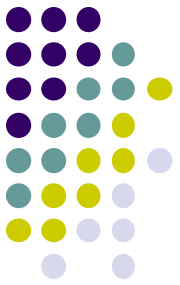
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv \end{aligned}$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$



# Resolver...

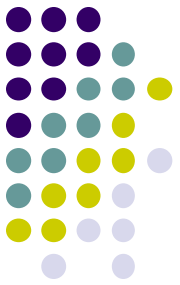
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$



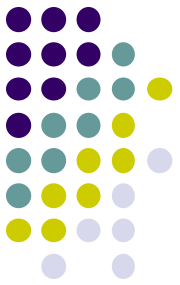
# Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

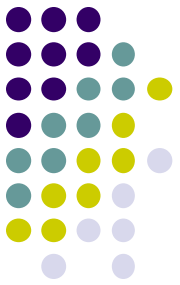
Condicional  
Condicional  
Associativa  
De Morgan  
Condicional

Mostramos a equivalência usando o método dedutivo



# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ 
  - De Morgan  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
  - De Morgan  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  - Dupla Negação  $\sim(\sim p) \equiv p$
  - Distributiva  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
  - Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$



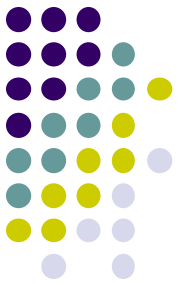
# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$$



- De Morgan  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- De Morgan  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- Dupla Negação  $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$

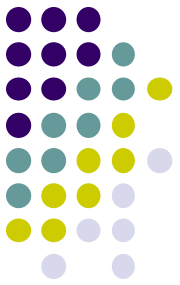


# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$

- De Morgan  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- Dupla Negação  $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$

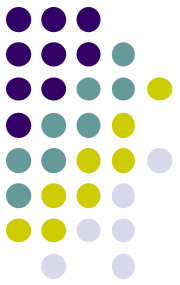


# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q\end{aligned}$$

- Dupla Negação  $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$

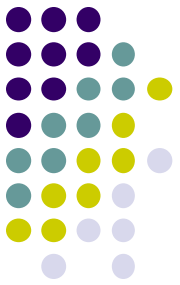


# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge p \vee \sim q\end{aligned}$$

- Distributiva  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$

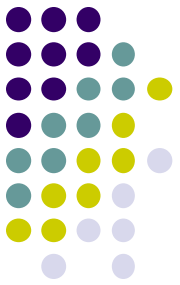


# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$

- Negação  $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$

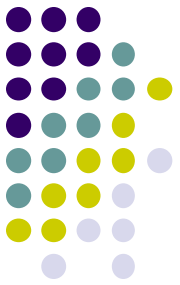


# Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$

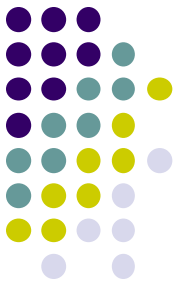
- Elementos Neutros  $p \vee F \equiv p$



# Resolver ...

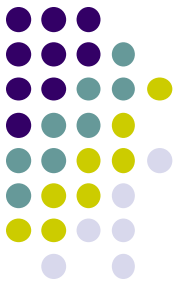
- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$



# Demonstrações

- Podemos utilizar este método também para mostrar que uma fórmula é uma tautologia ou contradição.
- Exemplo:
  - Demonstrar que  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$  é uma tautologia
    - Usaremos: Condicional, De Morgan, Associativa e Comutativa.

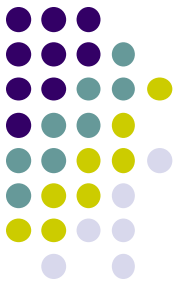


# Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$  Condicional

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

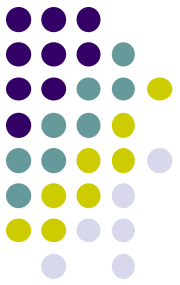


# Resolvendo...

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) \text{ Condicional}$$
$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \text{ De Morgan}$$

Leis de De Morgan

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$



# Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa}\end{aligned}$$

## Propriedade Associativa

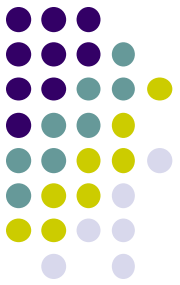
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

## Propriedade Comutativa

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

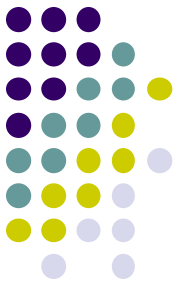


# Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa} \\ &\equiv V \vee V && \text{Negação}\end{aligned}$$

Propriedade de Negação

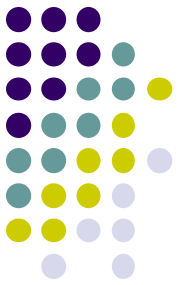
$$p \vee \sim p \equiv V$$



# Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa} \\ &\equiv V \vee V && \text{Negação} \\ &\equiv V\end{aligned}$$

Logo é uma tautologia



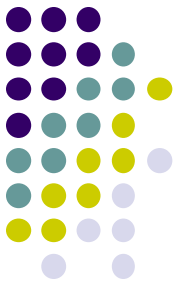
# Um algoritmo...

...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000) ))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```



# Um algoritmo...

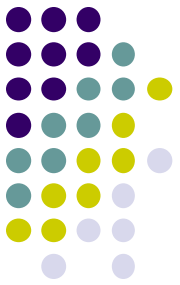
...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000)))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

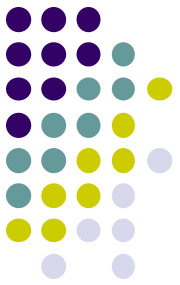


# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000



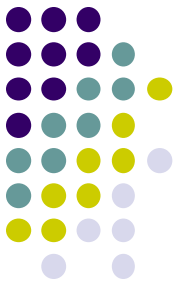
# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$$p \wedge \sim(p \wedge q)$$



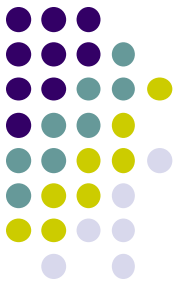
# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva



# Um algoritmo...

...

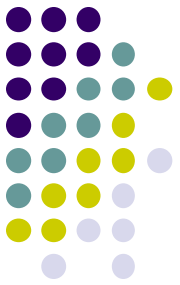
```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

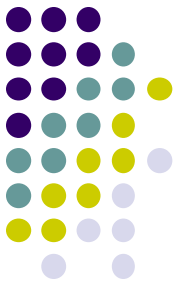
- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

?



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

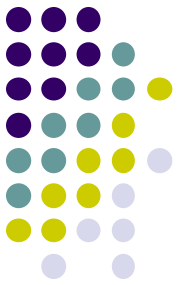
- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(\underbrace{p \wedge \sim p}_{\text{Negação}}) \vee (p \wedge \sim q)$

Negação



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

F



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

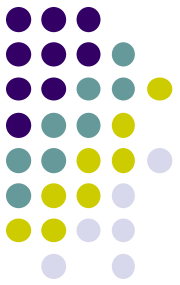
$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$\underbrace{F \vee (p \wedge \sim q)}$

?



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$\underbrace{F \vee (p \wedge \sim q)}$

Elementos neutros



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x +1;  
    senão x = x+2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

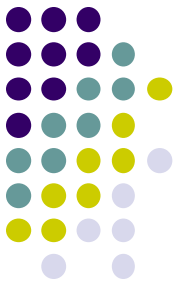
$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



# Um algoritmo...

...

```
if (p and not q)
    então x = x + 1;
senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

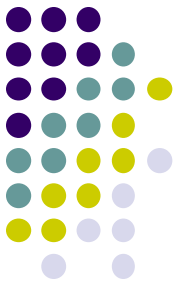
$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



# Um algoritmo...

...

if ((saída>entrada)and not  
(pressão < 1000))

então  $x = x + 1$ ;

senão  $x = x + 2$ ;

- $p$ : saída>entrada
- $q$ : pressão < 1000

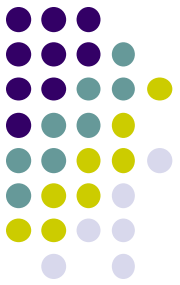
$p \wedge \sim(p \wedge q)$  De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$  Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



# Um algoritmo...

...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000) ))
```

```
    então x = x +1;
```

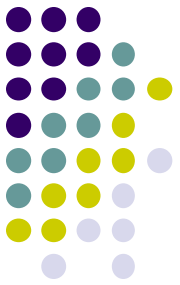
```
    senão x = x+2;
```

...

```
if ((saída>entrada)and not (pressão < 1000))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```



# Exercícios

1) Mostre que  $p \rightarrow p \vee q$  é uma tautologia

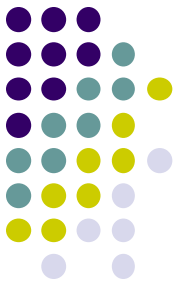
- Dica: condicional; associativa; negação, dominação.

2) Mostre que  $p \rightarrow q \equiv p \vee q \rightarrow q$

- Dica: partir da proposição maior. Condicional; De Morgan; Distributiva; Negação; Elemento Neutro; Condicional.

3) Mostre que  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p$

- Dica: Condicional; Distributiva; Negação; Elemento Neutro.



# Exercícios

1) Demonstre que as proposições são tautológicas usando o método dedutivo.

$$(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

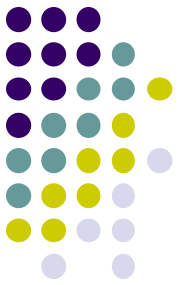
$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$

$$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$$

$$p \wedge q \rightarrow p$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$



# Exercícios

2) Demonstre as equivalências usando o método dedutivo.

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow q \vee r$$