Lógica Fuzzy

"A lógica difusa tem por objetivo modelar modos de raciocínio aproximados ao invés de precisos."

Lógica Fuzzy

- Na lógica binária (clássica) as proposições são unicamente "Verdadeiras" ou "Falsas".

- Na lógica difusa as proposições podem ter valores intermediários entre "Verdadeiro" e "Falso".
  A veracidade destas é uma função que pode assumir qualquer valor entre 0 (absolutamente falso) e 1 (absolutamente verdadeiro).

- As sentenças passam a ter um **grau de pertinência**.

Lógica Fuzzy

- Muitas vezes utiliza-se uma discretização dos valores possíveis para um domínio => lógica de múltiplos-valores.
- Exemplo: {0, 0,5, 1} para valores que indiquem "Falso", "Talvez verdadeiro" e "Verdadeiro", respectivamente.
- A lógica difusa então visa modelar modos de raciocínio imprecisos.

Lógica Fuzzy

- Clássica

  Falso x Verdadeiro (0 ou 1);

- Difusa

  Intervalo [0..1]

Lógica Fuzzy

- Clássica
  - Predicados exigem definição exata
  - Não existe resposta diferente de verdadeiro ou falso.
    - → é homem, é mortal, é par …
- Difusa
  - Predicados não possuem definição exata
  - Respostas são relativas
  - Possuem um grau de veracidade que variam entre “totalmente falso” e “totalmente verdadeiro”:
    - → é alto, está cansado, é jovem ...

Lógica Fuzzy

- Clássica
  - Quantificadores: Para todo, Existe
- Difusa
  - Quantificadores: Muitos, Poucos, A maioria, Ocasionalmente...

Lógica Fuzzy

Lógica Fuzzy

"Tão próximas as leis da matemática estejam da realidade, menos próximas da certeza elas estarão. E tão próximas elas estejam da certeza, menos elas se referirão à realidade”

(Albert Einstein)

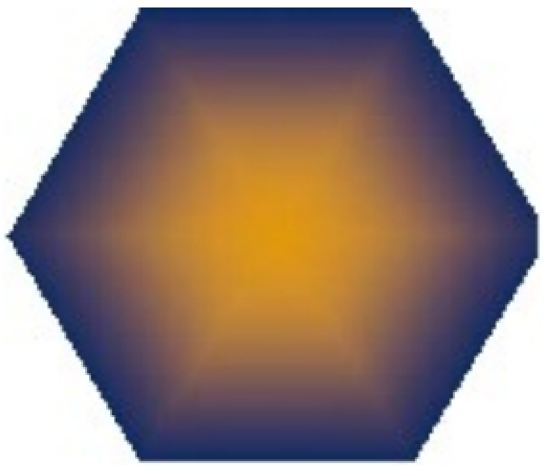
Lógica Fuzzy

Os copos estão cheios ou vazios?

Qual seria a resposta mais apropriada ?

Lógica Fuzzy

- O hexágono é parcialmente azul, ou o hexágono é parcialmente amarelo.
- O hexágono é quase azul, ou quase amarelo.
- O hexágono é 55% azul, ou o hexágono é 45% amarelo.



Conjuntos Fuzzy

- No mundo real os problemas muitas vezes não conseguem ser representados pela lógica clássica.

- Conjuntos convencionais têm apenas os critérios de pertinência “pertence” ou “não pertence”, e “está contido” ou “não está contido”, ou seja, um elemento não pode pertencer parcialmente a um conjunto, da mesma forma que um conjunto não pode estar parcialmente contido em outro.

Conjuntos Fuzzy

- Um exemplo é o conjunto das pessoas jovens:
  - Um bebê certamente pertence a esse conjunto e um idoso de 100 anos não.
  - Mas o que podemos dizer sobre as pessoas com 20, 30 e 40 anos?

Conjuntos Fuzzy

- Grau de pertinência:

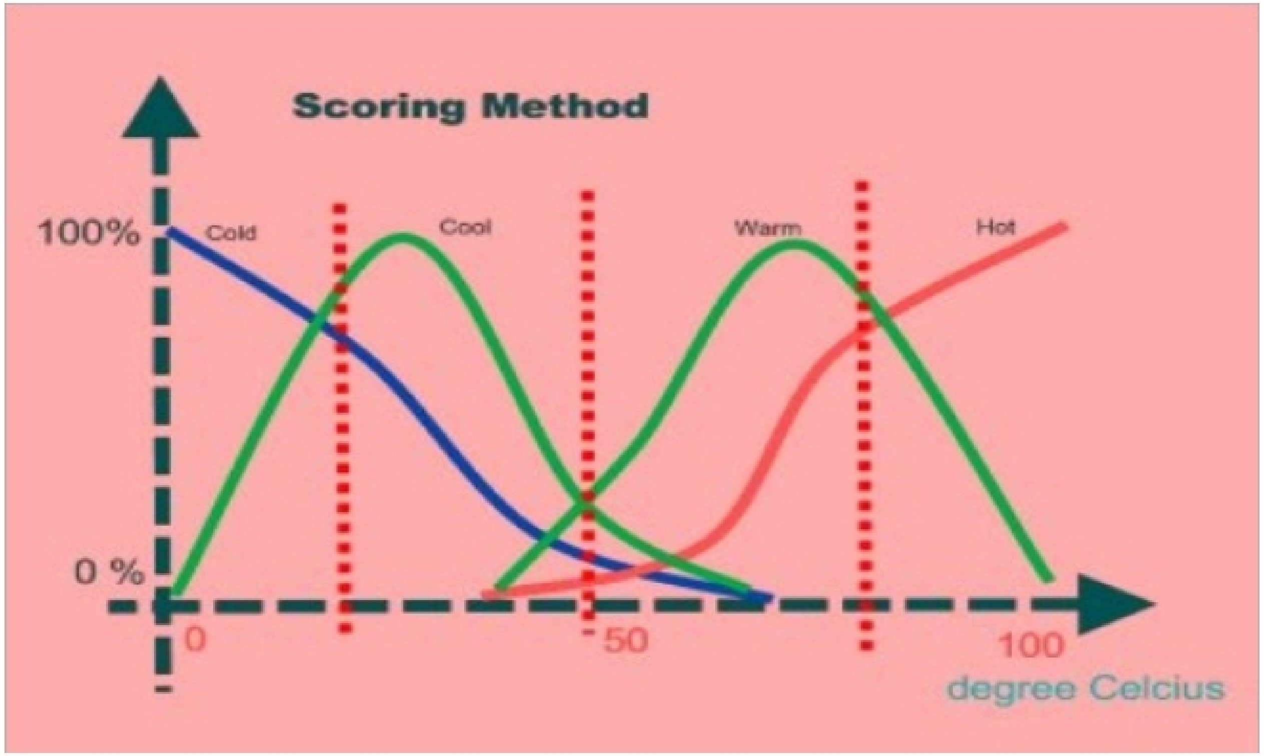
  Cada elemento do conjunto difuso tem um grau de pertinência no intervalo [0, 1], dessa forma permitindo uma transição gradual da falsidade para a verdade.

Conjuntos Fuzzy

- Não existe uma base formal para determinar o grau de pertinência. Este é escolhido experimentalmente / empiricamente.
- O grau de pertinência nos permite representar valores imprecisos como por exemplo uma temperatura quente, fria, morna, um pouco fria...

Conjuntos Fuzzy

- No eixo x representamos a temperatura da água e no y seu grau de pertinência.



Conjuntos Fuzzy

- Exemplo

  U = {5,10,20,30,40,50,60,70,80} um universo de idades

  Conjuntos Fuzzy:

  A = {crianças}, B = {jovens}, C= {adultos} , D = {velhos}

Conjuntos Fuzzy

Definição dos Graus de Pertinências

IDADE	CRIANÇA	JOVEM	ADULTO	VELHO
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Conjuntos Fuzzy

- Suporte de um conjunto *fuzzy* A no conjunto universo U é conjunto clássico que contém todos os elementos de U que têm grau de pertinência maior que zero (>0)

- Exemplos:

  sup {jovens} = {5,10,20,30,40,50}

  sup {criancas} = conjunto vazio

  sup {adultos} = {20,30,40,50,60,70,80}

Conjuntos Fuzzy

- Cardinalidade de um conjunto fuzzy A sobre um conjunto universo finito U é a soma dos graus de pertinência de todos os elementos de U em A e indicamos:

- Exemplos:

  $|velho| = 0+0+0.1+0.2+0.4+0.6+0.8+1+1 = 4.1$

Conjuntos Fuzzy

- Noção estatística: Distribuição de probabilidades e em um espaço de 100 dias:

  U = [1 2 3 4 5 6 7 8]

  e = [0.1 0.8 0.1 0 0 0 0 0] = 1

- Noção de crença: Conjunto fuzzy que expressa o grau de possibilidade neste mesmo tempo:

  U = [1 2 3 4 5 6 7 8]

  c = [1 1 1 1 0.8 0.6 0.4 0.2] <> 1

Conjuntos Fuzzy

- Vemos, por exemplo, que a possibilidade para $X = 3$ é igual a 1, enquanto a probabilidade é apenas 0.1.
- O exemplo mostra que um evento possível não implica que ele é provável. Por outro lado, se um evento é provável, ele deve ser possível.

Conjuntos Fuzzy

- Universo:
  - O universo contém os elementos que podem ser considerados no conjunto
  - Seu objetivo é não permitir o uso de dados incorretos ou incoerentes.
  - Por exemplo o universo de um conjunto que mede sabor poderia ser o conjunto de noções psicológicas {doce,amargo etc.}

Conjuntos Fuzzy

- Representação:
  - Um conjunto fuzzy A é uma coleção de pares:

    $A = \{(x, \mu(x))\}$

    Onde $\mu(x)$ é o grau de pertinência do elemento x.

Conjuntos Fuzzy

- Exemplo: um conjunto fuzzy representando o conceito "**crianças**" do universo dado seria:

  {(5,0),(10,0),(20,0),(30,0), (40,0),(50,0),(60,0),(70,0),(80,0)}

- Exemplo: um conjunto fuzzy representando o conceito "**velhos**" do universo dado seria:

  {(5,0),(10,0),(20,0.1),(30,0.2),(40,0.4),(50,0.6),(60,0.8),(70,1),(80,1)}

Conjuntos Fuzzy

- Exemplo: um conjunto fuzzy representando o conceito "céu ensolarado" poderia associar:
  - Pertinência 1,0 a uma cobertura de nuvens de 0%
  - Pertinência 0,8 a uma cobertura de nuvens de 20%
  - Pertinência 0,4 a uma cobertura de 30%
  - Pertinência 0,0 a uma cobertura de 75% ou mais

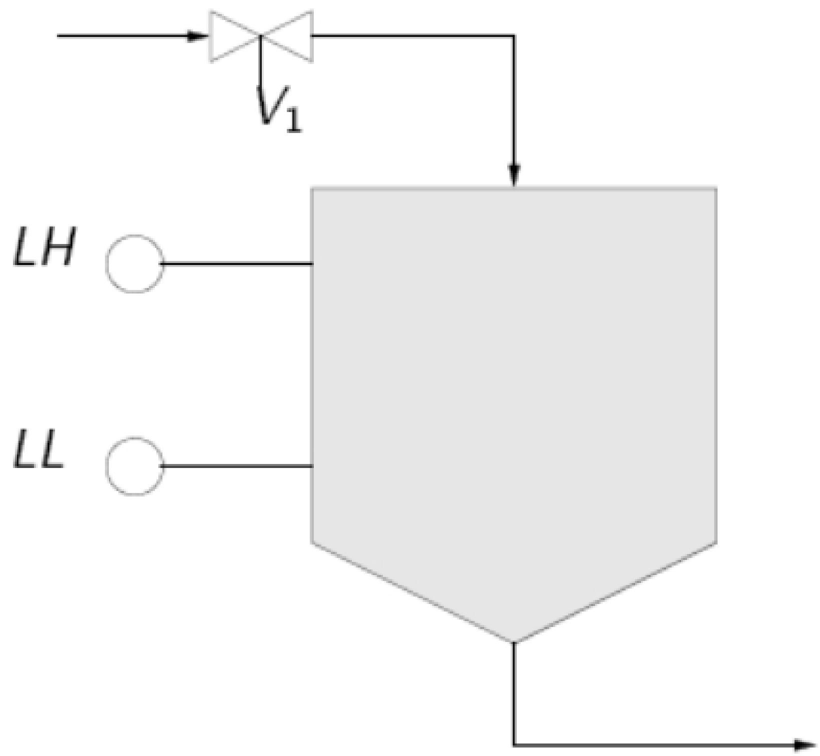
Conjunto : { (0,1.0), (20,0.8), (30,0.4), (75,0.0)}

Conjuntos Fuzzy

- Terminologia:
  - Uma “variável linguística” é aquela que tem como valores palavras ou sentenças.
  - O conjunto de valores que ela pode assumir é chamado “conjunto de termos”
  - Cada valor no conjunto de termos é uma "variável fuzzy" definida sobre a "variável linguística".

Conjuntos Fuzzy

- Exemplo do tanque:



Conjuntos Fuzzy

- Exemplo do tanque:
  - Na premissa:

    Se o nível é baixo, ...

    - o “baixo” é uma variável fuzzy, ou seja, um valor da variável linguística “nível”.

Conjuntos Fuzzy

- As medidas de “nível” são escalares, e a declaração “nível é baixo” corresponde ao valor de pertinência “nível(i)” à variável “baixo”, onde i é o percentual de tanque cheio.
- A saída é um número $\mu \in [0, 1]$ que diz quão bem a premissa “nível é baixo” é satisfeita.

Conjuntos Fuzzy

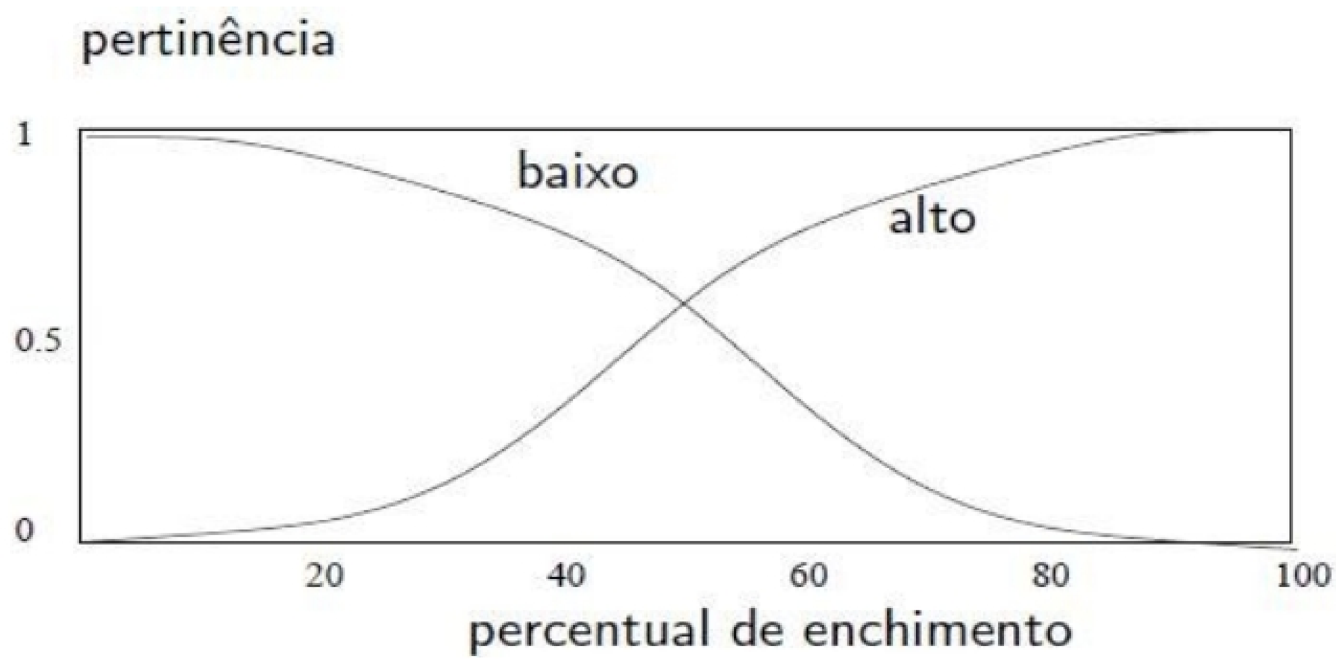


Figura: Termos {baixo,alto} para o problema do tanque.

Exemplo: Aproximadamente para i < 10 % a premissa "nível é baixo" é totalmente verdadeira ($\mu = 1$).

Operações em Conjuntos Fuzzy

Operações difusas:

- Intersecção: $u(A \cap B) = \min(u(A), u(B))$
- União: $u(A \cup B) = \max(u(A), u(B))$
- Complemento: $u(A') = 1 - u(A)$

Operações em Conjuntos Fuzzy

Exemplo (comprando uma casa)

- Uma família com quatro integrantes deseja comprar uma casa.
- Uma indicação de conforto se refere ao número de dormitórios.

- Eles também desejam comprar uma casa grande.

  Seja u = (1, 2, . . . , 10) o conjunto de casas descritas pelo número de quartos de dormir (ou seja, a casa i tem possui i dormitórios)

Operações em Conjuntos Fuzzy

- O conjunto fuzzy c que caracteriza conforto pode ser descrito como:

  c = [0.2 0.5 0.8 1 0.7 0.3 0 0 0 0]

- Seja i o conjunto fuzzy caracterizando a noção de grande. O conjunto pode ser caracterizado por:

  i = [0 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1 1 1]

Operações em Conjuntos Fuzzy

- A interseção entre confortável e grande é dado por:

  $c \cap i = [0\ 0\ 0.2\ 0.4\ 0.6\ 0.3\ 0\ 0\ 0\ 0]$

- Interpretando o conjunto fuzzy $c \cap i$, concluímos que uma casa com 5 dormitórios é a mais satisfatória, com grau 0,6. A segunda melhor solução é a casa com 4 dormitórios.

- A união de confortável e grande nos dá:

  $c \cup i = [0.2\ 0.5\ 0.8\ 1\ 0.7\ 0.8\ 1\ 1\ 1\ 1]$

- O complemento de grande produz: Qual a interpretação de i?

  $i' = [1\ 1\ 0.8\ 0.6\ 0.4\ 0.2\ 0\ 0\ 0\ 0]$

Sistemas Fuzzy

Considerando a incerteza presente nesses casos é extremamente válido lembrar que as incertezas somente podem ser levadas em consideração se for possível diante de uma determinada situação efetuar aproximações e cálculos que levem a alguma conclusão válida.

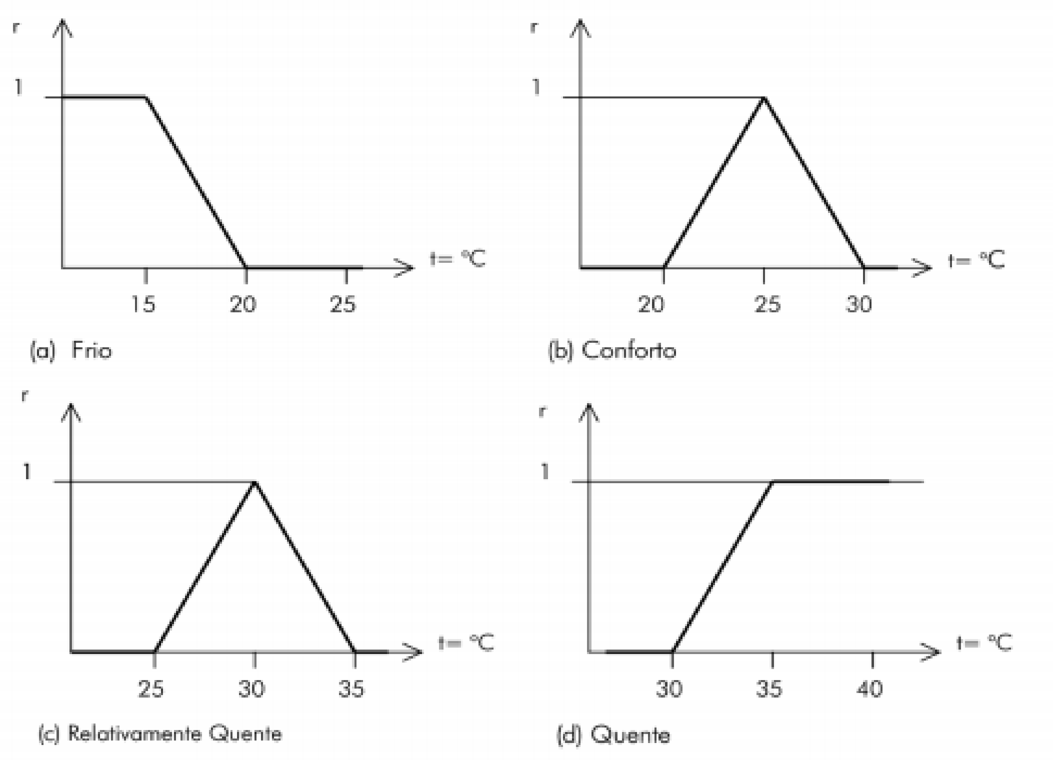
Diante deste contexto na lógica fuzzy existe algo chamado **função de pertinência** que vem a ser um mapeamento matemático de cada valor numérico possível para as variáveis linguísticas.

Nota-se neste momento a importância em aproximar a léxica do modelo matemático para que assim seja possível conclusões válidas sobre o problema.

Exemplo

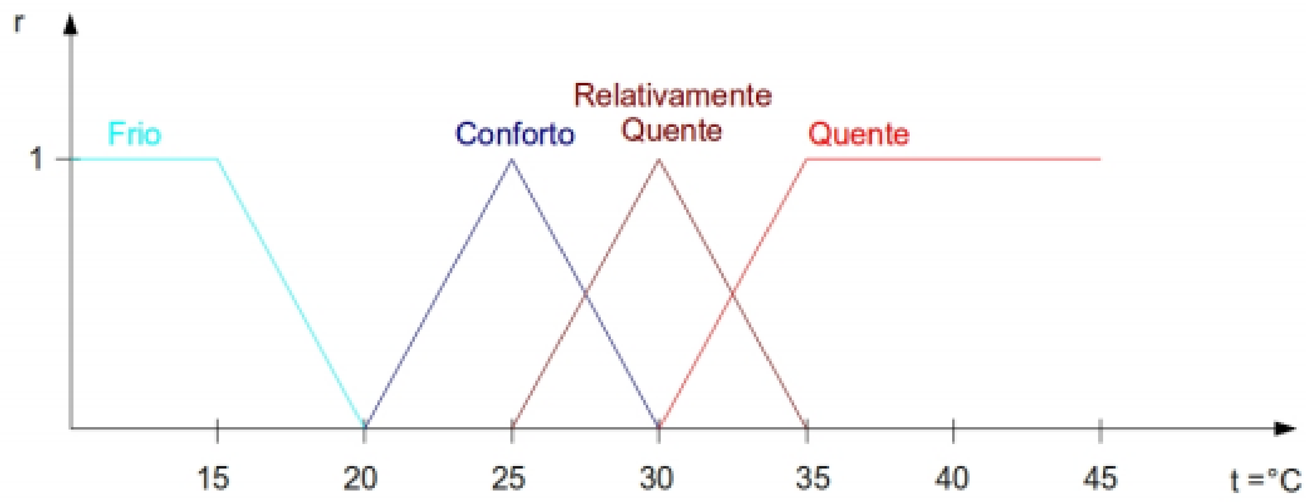
Um exemplo clássico apresentado em grande parte das literaturas sobre lógica fuzzy é o exemplo da temperatura térmica.

Para exemplificar as funções de pertinência, considere os gráficos que representam quatro variáveis térmicas: frio, conforto, relativamente quente e quente. Estas variáveis são relativas a uma análise sobre temperatura e conforto.



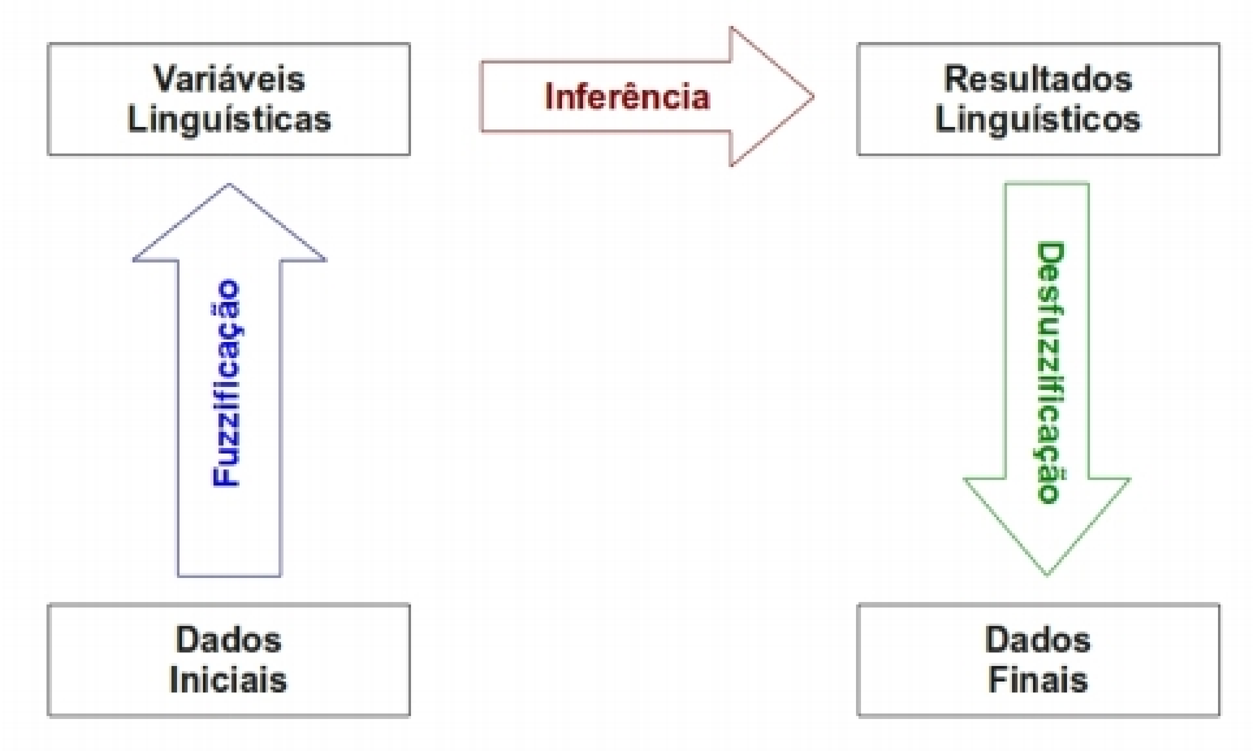
Exemplo

É bastante comum este tipo de representação ser apresentada em um único gráfico, conforme pode-se verificar na figura. Nota-se que o nebuloso limite entre as variáveis fica bem claro através deste exemplo.



Sistema Fuzzy - Fases

- Consiste de 3 operações básicas:



Sistema Fuzzy - Fases

- Fuzzificação

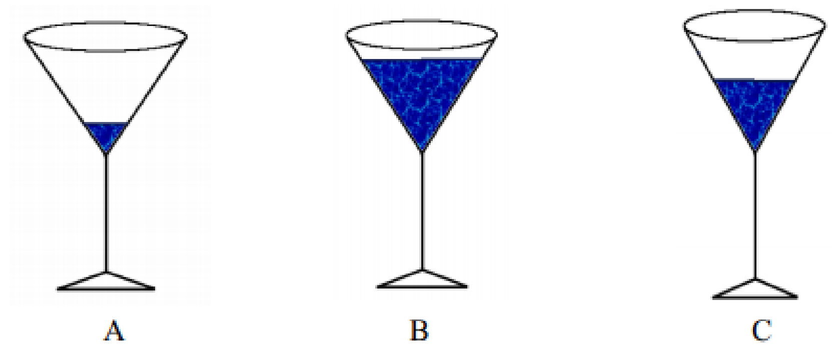
  - Nesta primeira etapa do Sistema Lógico fuzzy o problema é analisado e os dados de entrada são transformados em variáveis linguísticas. Neste momento é de extrema importância que todos os dados de imprecisão e incerteza sejam considerados e transformados em variáveis linguísticas. Após esta transformação são determinadas também as funções de pertinência.

Sistema Fuzzy - Fases

- Fuzzificação

Observando a Figura pode-se afirmar que:

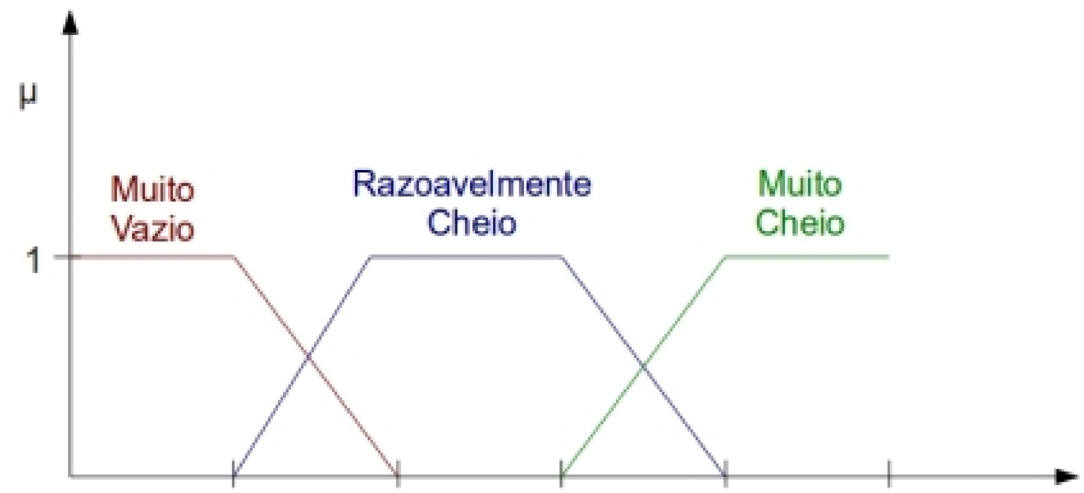
O copo A esta Muito Vazio;
O Copo B esta Muito Cheio;
O Copo C esta razoavelmente cheio;



Sistema Fuzzy - Fases

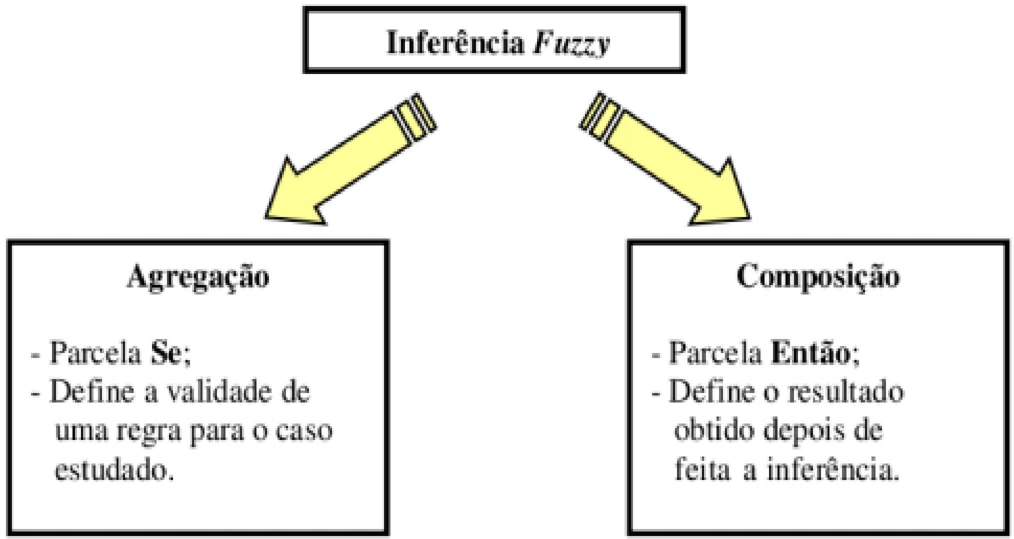
- Fuzzificação

Considerando o volume dos copos, a figura a seguir apresenta as funções pertinência considerando as variáveis linguísticas Muito Vazio, Muito Cheio e Razoavelmente Cheio



Sistema Fuzzy - Fases

- Inferência



Etapa em que serão criadas as regras ou proposições através da associação das variáveis linguísticas já criadas.

As proposições são geradas do relacionamento entre as variáveis do modelo e a região Fuzzy. Essas regras resultantes das associações podem ser condicionais ou não condicionais.

Esta fase do sistema lógico fuzzy pode ser dividido em dois componentes: agregação e composição.

Sistema Fuzzy - Fases

- Inferência

Enquanto a agregação define a validade de uma regra, a composição define o resultado obtido através de uma inferência.

Exemplo: Considerando a realidade do gerenciamento de projeto, onde existem duas afirmações:

O projeto A é muito longo;

O risco do projeto é Alto;

Sistema Fuzzy - Fases

- Inferência

Sabe-se através da experiência do especialista em projetos que quanto maior a duração do projeto, maior o risco. Imaginando que neste exemplo Duração do Projeto e Risco do Projeto são duas variáveis linguísticas com valores “Muito Longo” e “Alto” respectivamente, pode-se inferir que:

Se o projeto é MUITO LONGO Então o Risco do Projeto é ALTO.

Neste caso esta sendo apresentado a Agregação através da condição colocada e a Composição através do resultado relacionado a condição.

Sistema Fuzzy - Fases

- Defuzzificação

Etapa em que os valores fuzzy são convertidos em números reais tendo assim um conjunto de saída matematicamente definido.

Considere os conjuntos fuzzy A, B e C produzindo uma variável de solução D.

Se w é Y então D é A

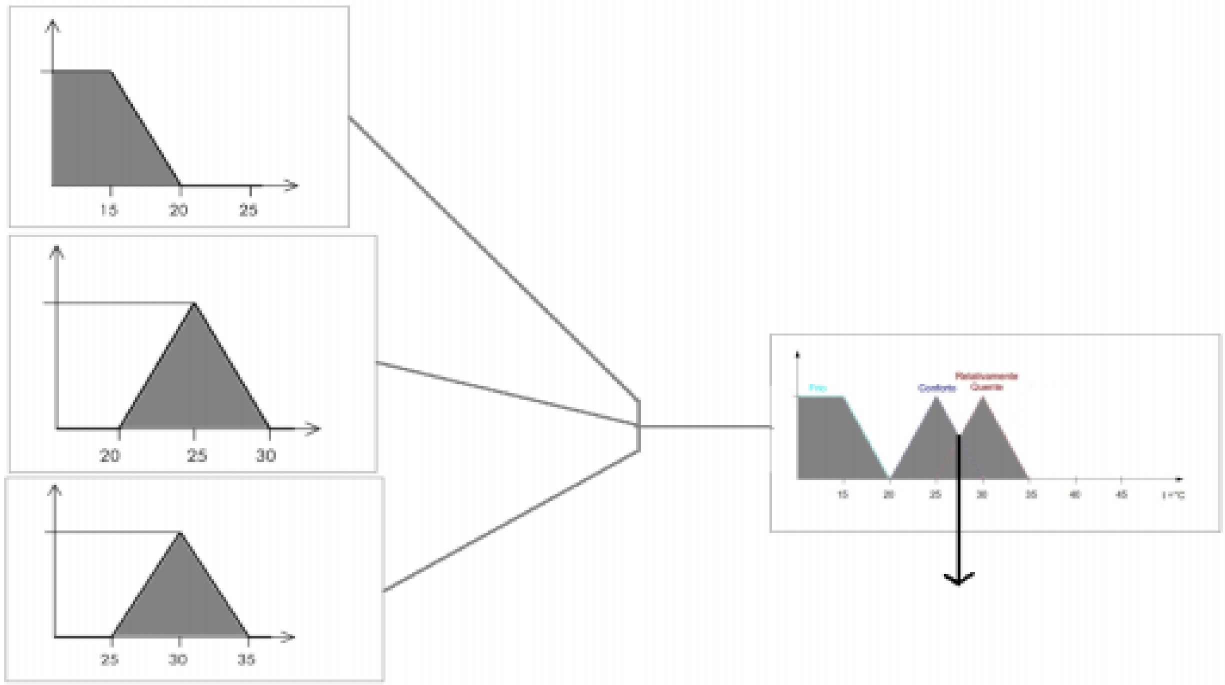
Se x é X então O é B

Se y é Z então D é C

Sistema Fuzzy - Fases

- Defuzzificação

Para encontrar o valor atual e real correspondente a d é necessário que se encontre um valor que melhor represente a informação constante no conjunto D. Este é o processo chamado de defuzzificacão.



Sistema Fuzzy - Fases

- Defuzzificação

Alguns Métodos

- **Centroid**, é o método onde a saída precisa a ser considerada é o centro de gravidade do conjunto fuzzy.

- **Maximum height**, é o método onde a saída precisa se obtém tomando a média entre os dois elementos extremos no universo de discurso que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do conjunto fuzzy de saída.

Modificadores

- **Definição**:

  Um modificador linguístico é um termo que modifica o significado de um conjunto fuzzy, ou seja, é uma operação sobre este conjunto que retrata a imprecisão presente na lógica fuzzy.

  Exemplos:

  - “pouco”, “mais ou menos”, “possivelmente”, “com certeza” são exemplos de modificadores.

  - “pouco quente”, “mais ou menos cheio”, “extremamente chato” são exemplos de conjuntos fuzzy aplicados de um modificador

Modificadores

- Embora seja difícil deixar preciso o significado do efeito do modificador “muito”, com certeza ele produz um efeito intensificador.

- Os modificadores são muitas vezes aproximados pelas operações:

muito $\equiv (a \rightarrow a^2)$

mais ou menos $\equiv (a \rightarrow \sqrt{a})$

Modificadores

- Exemplo: Dado o conjunto: jovem = [10, 20, 30, 40, 50] com graus de pertinência [1 , 0.6 , 0.1 , 0 , 0], respectivamente

- Podemos derivar a função de pertinência para o conjunto “muito jovem” elevando todos os termos ao quadrado, o que produz:

  muito jovem = $jovem^2$ = [1 0.36 0.01 0 0]

- Da mesma forma, o conjunto “muito muito jovem” é obtido fazendo:

  muito muito jovem = $jovem^4$ = [1 0.13 0 0 0]

Modificadores

- Uma família de modificadores pode ser gerada fazendo onde p é a potência entre zero e infinito.
- Quando $p = \infty$ o modificador pode ser dito "exatamente", pois isto força a nulificação de pertinência de todas as entradas menores do que 1.

Exercícios

- Explique a diferença entre um conjunto clássico e um conjunto fuzzy
- Crie um Conjunto Universo de alturas. Crie 3 conjuntos fuzzy (alto, médio e baixo) com seus respectivos graus de pertinência em relação ao Universo.
- Calcule o suporte e a cardinalidade de cada conjunto fuzzy
- Calcule o conjunto intersecção de baixo e médio
- Calcule o conjunto união de médio e alto

Aplicações

- São diversas as áreas onde a lógica fuzzy é aplicada atualmente devido sua característica de lhe dar com problemas reais em um raciocínio próximo do humano.

- Problemas onde é necessária a tomada de decisões baseada em aproximações.

- Alguns exemplos de aplicações são:

  - BOVESPA, onde se faz controles financeiros;
  - NASA, onde se controla o aquecimento dos motores das espaçonaves;
  - Radares de Velocidades, para reconhecimento das placas;
  - Supervisão de Linhas de Produção, efetuando controles necessários;
  - Robôs, buscando processamentos próximos do humano;
  - Controle de vôos.

Aplicações

- Hitachi (1985) – controle de aceleração, frenagem, e parada para a estrada de ferro de Sendai
- Takeshi Yamakawa (1987) – pêndulo invertido
- Laboratório Internacional de Engenharia Fuzzy (LIFE) (1988) – cooperativa 48 companhias
- Aspiradores de pó – controle de sucção
- Máquinas de lavar (Hitachi) – uso otimizado de potência, água e detergente
- Câmera com autofoco (Canon)

Aplicações

- Ar condicionado industrial (Mitsubishi) – reduz o consumo de potência em 24%, usa menos sensores
- Outros projetos japoneses:
  - Reconhecimento de caracteres
  - Sistemas fuzzy óticos
  - Robôs
  - Helicópteros comandados por voz
  - Sistemas de elevadores
- NASA – controle fuzzy para ancorar suas naves automaticamente no espaço

Perspectivas

- Potencial manuseio de incertezas e controle de sistemas complexos
- Lógica fuzzy combinada com redes neurais artificiais
  - Capacidade de adaptação e aprendizagem
- Simbiose
  - Novas classes de sistemas e de controladores neurodifusos