7 Lógica Fuzzy

"Ser ou não ser: esta é a questão."
(William Shakespeare, *Hamlet*)

7.1 INTRODUÇÃO

Usamos, no cotidiano, conceitos subjetivos para classificar ou considerar certas situações tais como :

- Siga em frente "alguns metros" .
- O dia está "parcialmente" nublado.
- Preciso perder "alguns" quilos para ficar "bem".
- Estamos com uma moeda "estável".

ou ainda :

- A classificação de certos objetos como "largo", "sujo",..
- A classificação de pessoas pela idade tal como "velho", "jovem",..
- A descrição de características humanas como "saudável", "alto", ..

Nos exemplos acima, os termos entre aspas são "fuzzy" no sentido que envolvem imprecisão e são conceitos vagos. O conceito "fuzzy" pode ser entendido como uma situação onde não podemos responder simplesmente "Sim" ou "Não". Mesmo conhecendo as informações necessárias sobre a situação, dizer algo entre "sim" e "não" como por exemplo "talvez", "quase", ...se torna mais apropriado.

Considere, por exemplo, informações como "homens altos" , "dias quentes" ou "vento forte". Nada existe que determine exatamente qual a "altura", "temperatura" ou "velocidade" que podemos considerar como limites para tais informações. Se considerarmos como alto todos os homens com mais de 1.90m, então um homem com 1.88m não seria "alto" e sim "quase alto".

7.2 HISTÓRICO

As primeiras noções da lógica dos conceitos "vagos" foi desenvolvida por um lógico polonês Jan Lukasiewicz (1878-1956) em 1920 que introduziu conjuntos com graus de pertinência sendo 0 , 1⁄2 e 1 e, mais tarde, expandiu para um número infinito de valores entre 0 e 1. A primeira publicação sobre lógica "fuzzy" data de 1965, quando recebeu este nome. Seu autor foi Lotfi Asker Zadeh (ZAH-da) , professor em Berkeley, Universidade da California.

Zadeh criou a lógica "fuzzy" combinando os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Lukasiewicz, definindo graus de pertinência. Entre 1970 e 1980 as aplicações industriais da lógica "fuzzy" aconteceram com maior importância na Europa e após 1980, o Japão iniciou seu uso com aplicações na indústria. Algumas das primeiras aplicações foram em um tratamento de água feito pela Fuji Electric em 1983 e pela Hitachi em um sistema de metrô inaugurado em 1987. Por volta de 1990 é que a lógica "fuzzy" despertou um maior interesse em empresas dos Estados Unidos. Devido ao desenvolvimento e as inúmeras possibilidades práticas dos sistemas "fuzzy" e o grande sucesso comercial de suas aplicações, a lógica "fuzzy" é considerada hoje uma técnica "standard" e tem uma ampla aceitação na área de controle de processos industriais.

7.3 CONJUNTOS FUZZY

Na teoria clássica, os conjuntos são denominados "crisp" e um dado elemento do universo em discurso (domínio) pertence ou não pertence ao referido conjunto.

Na teoria dos conjuntos "fuzzy" existe um grau de pertinência de cada elemento a um determinado conjunto. Por exemplo: Conjunto das pessoas com alta renda. Conjunto das pessoas altas.

Podemos verificar que não existe uma fronteira bem definida para decidirmos quando um elemento pertence ou não ao respectivo conjunto nos exemplos acima.

Com os conjuntos "fuzzy" podemos definir critérios e graus de pertinência para tais situações. A função característica (*crisp sets*) pode ser generalizada de modo que os valores designados aos elementos do conjunto universo U pertençam ao intervalo de números reais de 0 a 1 inclusive, isto é [0,1].

$A : U \mapsto [0,1]$.

Estes valores indicam o GRAU DE PERTINÊNCIA dos elementos do conjunto U em relação ao conjunto A, isto é, quanto é possível para um elemento x de U pertencer ao conjunto A . Tal função é chamada de FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA e o conjunto A é definido como "CONJUNTO FUZZY".

7.4 CONCEITOS IMPORTANTES

Observe o exemplo abaixo :

Seja o conjunto universo U ={5,10,20,30,40,50,60,70,80} e consideremos os seguintes conjuntos "fuzzy": A = {crianças}, B = {jovens}, C = {adultos} e D = {velhos} para os quais atribuímos os graus de pertinência dos elementos do conjunto U na seguinte tabela:

IDADE	CRIANÇA	JOVEM	ADULTO	VELHO
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

O SUPORTE de um conjunto fuzzy A no conjunto universo U é o conjunto clássico que contém todos os elementos de U que têm grau de pertinência maior do que zero (>0) e indicamos

sup A= { x Î U | μ_A(x) > 0 }

Exemplos: O suporte do conjunto "fuzzy" "jovem" da tabela anterior é o conjunto clássico

sup (jovem) = { 5,10,20,30,40,50}

O conjunto vazio "fuzzy" tem um conjunto suporte vazio, isto é, o grau de pertinência é 0.

Na tabela anterior o suporte do conjunto "fuzzy" "crianças" é o conjunto vazio Æ .

A CARDINALIDADE de um conjunto "fuzzy" A sobre um conjunto universo finito U é a soma dos graus de pertinência de todos os elementos de U em A e indicamos: |A|= (x)

Exemplo: A cardinalidade do conjunto "fuzzy" "velho" da tabela anterior é:

| velho | = 0+0+0.1+0.2+0.4+0.6+0.8+1+1 = 4.1

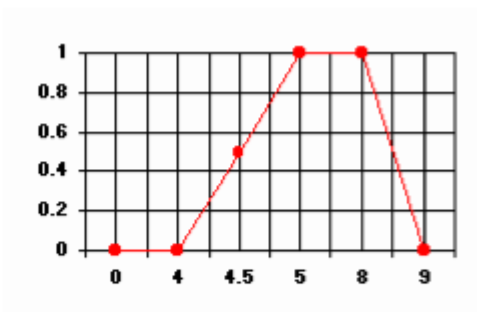
7.5 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS "FUZZY"

O conjunto "fuzzy" A é um SUBCONJUNTO de um conjunto "fuzzy" B se o grau de pertinência de cada elemento do conjunto universo U no conjunto A é menor ou igual que seu grau de pertinência no conjunto B

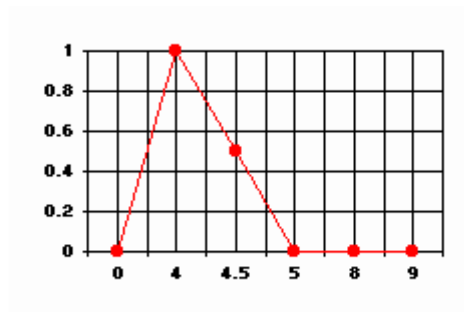
Exemplo: Na tabela anterior o conjunto "fuzzy" "velho" é um subconjunto do conjunto "fuzzy" "adulto".

Consideremos o conjunto U = [0 , 9] e sejam A e B dois conjuntos "fuzzy" e as respectivas funções de pertinência representadas pelas figuras:

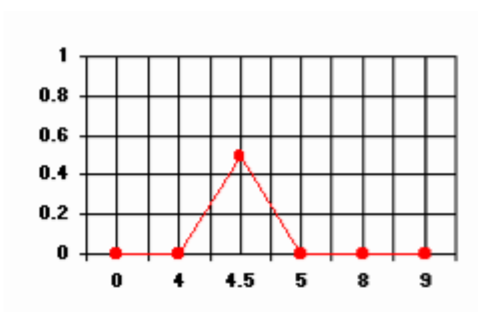
CONJUNTO FUZZY A



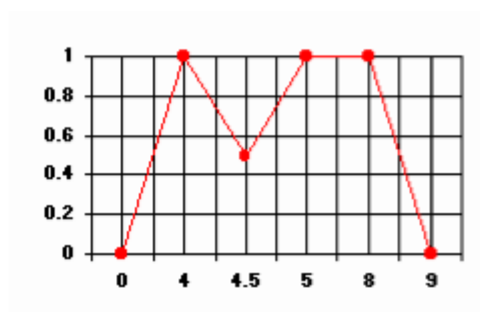
CONJUNTO FUZZY B



INTERSECÇÃO A B:



UNIÃO A B:



7.6 INFERÊNCIA NEBULOSA

Geralmente é utilizado a inferência de Mamdani, que permite a um sistema ter valores de entrada de um conjunto nítido e aplicar um conjunto de regras nebulosas a estes valores, a fim de derivar um único valor nítido de saída ou uma recomendação para uma ação.

EXEMPLO: Vamos supor que estejamos projetando um sistema de freio para carro, desenvolvido para atuar quando as estradas ficarem escorregadias e as rodas travam.

Regra 1:	SE	a pressão no freio for média
	ENTÃO	aplicar o freio
Regra 2:	SE	a pressão no freio for alta
	E	a velocidade do carro for alta
	E	a velocidade das rodas for alta
	ENTÃO	aplicar o freio
Regra 3:	SE	a pressão no freio for alta
	E	a velocidade do carro for alta
	E	a vlocidade das rodas for baixa
	ENTÃO	liberar o freio
Regra 4:	SE	a pressão no freio for baixa
	ENTÃO	liberar o freio

PASSO 1 – Fuzzyficar
Definir os conjuntos nebulosos para as diferentes variáveis linguisticas

- pressão no freio (0 a 100): alto (A), médio (M) e baixo (B)
A = {(50,0), (100,1)}
M = {(30,0), (50,1), (70,0)}
B = {(0,1), (50,0)}

- velocidade da roda (0 a 100): devagar (D), médio (M) e rápido (R)
D = {(0,1), (60,0)}
M = {(20,0), (50,1), (80,0)}
R = {(40,0), (100,1)}

- velocidade do carro (0 a 100): devagar (D), médio (M) e rápido (R)
D = {(0,1), (60,0)}
M = {(20,0), (50,1), (80,0)}
R = {(40,0), (100,1)}

Vamos considerar que Pressão = 60, Velocidade da Roda = 55 e Velocidade do Carro = 80.
Teremos os seguintes valores de pertinência:

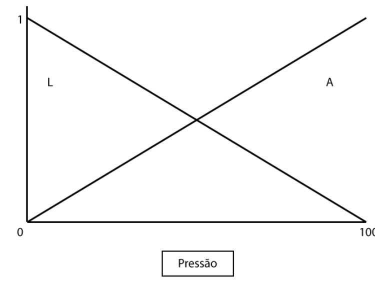
PRESSÃO	VELOCIDADE DA RODA	VELOCIDADE DO CARRO
$P_B(60) = 0$	$P_D(55) = 0.083$	$P_D(80) = 0$
$P_M(60) = 0.5$	$P_M(55) = 0.833$	$P_M(80) = 0$
$P_A(60) = 0.2$	$P_R(55) = 0.25$	$P_R(80) = 0.667$

PASSO 2 – Inferir (aplicar as regras)
Aplicar esses valores nebulosos aos antecedentes das regras do sistema.

A Regra 1, considerada isoladamente, diz que o grau em que se deve aplicar o freio está diretamente relacionado a uma pressão média no pedal. Como consideramos a pressão 60, e que $P_M(60) = 0.5$, assim pela Regra 1, temos um valor de 0.5 para a instrução “Aperte o freio”.

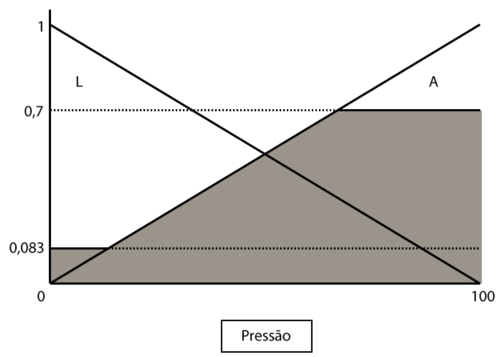
A Regra 2, utiliza um E, considerando que $P_A(60) = 0.2$, $P_R(80) = 0.667$ e $P_R(55) = 0.25$, então pegaremos o menor valor para a função de pertinência para "Aperte o freio" = 0.2.

De modo semelhante, avaliamos as Regras 3 e 4: $P_A(60) = 0.2$, $P_R(80) = 0.667$ e $P_R(55) = 0.083$, teremos então um valor de 0.083 para "Liberar o freio". E pela Regra 4, $P_L(60) = 0$ (liberar o freio).



Agora precisamos combinar estes valores. A seguir o gráfico demonstra as funções nebulosas de Apertar e Liberar o freio. Temos 0.2 e 0.5 para "Apertar o Freio" e 0.083 e 0 para "Liberar o Freio". Vamos somar os valores, chegando a um valor de 0.7 para "Apertar o Freio" e 0.083 para "Liberar o Freio".

O próximo passo é **cortar** as funções de pertinência das duas variáveis nestes valores, como mostrado abaixo. A função de pertinência para A foi cortada em 0.7 e a função de pertinência L foi cortada em 0.083. A forma resultante é a área sombreada abaixo das duas linhas cortadas e mostra a saída nebulosa combinada para as quatro regras:



PASSO 3 – Defuzzyficação
Isso pode ser feito pela obtenção do **Centro de Gravidade** ou **Centróide** da forma sombreada:

$C = \frac{\sum PA(X)X}{\sum PA(X)}$ onde $P_A(X)$ é a função de pertinência ilustrada pela área sombreada

C = (5 x 0.083) + (10 x 0.1) + (15 x 0.15) + (20 x 0.2) + ... + (100 x 1) / 0.083 + 0.1 + 0.15 + 0.2 + ... + 1
C = 717.666 / 10.53
C = 68.13, que pode ser traduzido para a pressão aplicada pelo freio às rodas do carro.

7.7 SISTEMAS ESPECIALISTAS NEBULOSOS

Consiste em um conjunto de regras que colaboram para a tomada de decisões de um especialista. Sistemas Especialistas tradicionais usam valores lógicos nítidos para determinar um diagnóstico baseado em um conjunto de evidências. No entanto, um especialista que se encontre diante de um paciente possui um conjunto de sintomas e normalmente não é capaz de fornecer um diagnóstico absolutamente correto.

O sistema especialista nebuloso pode ser construído a partir da **escolha** de um conjunto apropriado de **variáveis linguísticas** para o problema e da **definição** de **funções de pertinência** para estas variáveis. As regras são, então, geradas com base no conhecimento do especialista e usando as variáveis linguísticas. As regras nebulosas são então, aplicadas.

EXEMPLO: Considere um sistema médico projetado para recomendar uma dose de quinino para um paciente, com base na possibilidade de que ele possa pegar malária enquanto estiver de férias.

Para criar um sistema especialista nebuloso envolverá os seguintes passos:

1. Obter informações a partir de um ou mais especialistas.
2. Definir os conjuntos nebulosos.
3. Definir as regras nebulosas.

DEFININDO OS CONJUNTOS NEBULOSOS

Usaremos os seguintes conjuntos nebulosos ou variáveis linguísticas:
- temperatura média do destino (T)
- umidade média do destino (U)
- proximidade a grandes massas de água (P)
- industrialização do destino (I)

Dar para cada variável uma faixa de valores possível:
- Para temperatura, umidade e industrialização, assumiremos dois valores: (A) alta ou (B) baixa
- Para proximidade, assumiremos (P) perto ou (L) longe.

Para representar as funções nebulosas de pertinência: $P_{AB}(x)$, onde A é a variável (T, U, P ou I) e B é o valor (A, B, P ou L). Por exemplo: P_{UB} é a função de pertinência para o subconjunto nebuloso descrito como "umidade baixa".

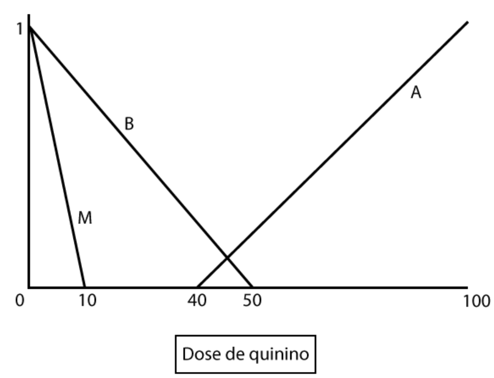
Os valores nítidos como entradas estarão na faixa de 0 a 100 para temperatura, umidade e industrialização e de 0 a 50 para proximidade a água.

Além disso, é preciso definir mais um conjunto nebuloso que é o conjunto usado para descrever a saída do sistema. Neste caso, o sistema prescreverá uma dose de quinino que poderá ter um de três valores: dose muito baixa (M), dose baixa (B) e dose alta (A):

$$P_{QM}(x) = \begin{cases} (10 - X) / 10 \text{ para } x <= 10 \\ 0 \quad \text{para } x > 10 \end{cases}$$

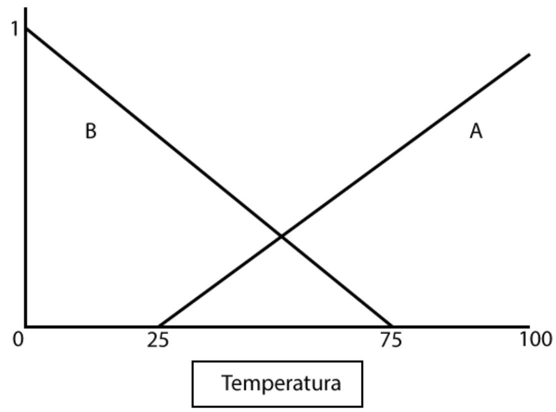
$$P_{QB}(x) = \begin{cases} (50 - X) / 50 \quad \text{para } x <= 50 \\ 0 \quad \text{para } x > 50 \end{cases}$$

$$P_{QA}(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } x <= 40 \\ (X - 40) / 60 \text{ para } x > 40 \end{cases}$$



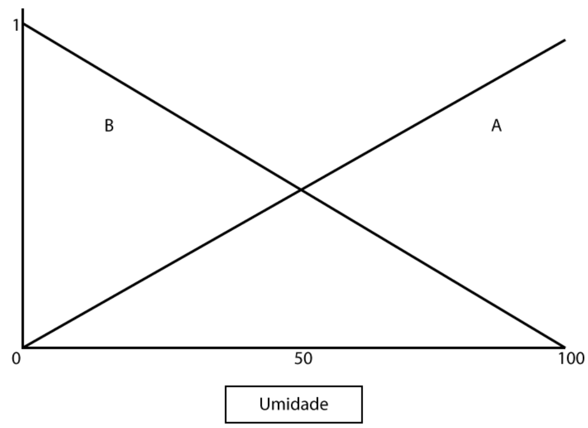
A seguir, a função de pertinência bem como o gráfico de cada um dos subconjuntos nebulosos.

$$P_{TA}(x) = \begin{cases} (X - 25) / 75 \text{ para } x >= 25 \\ 0 \quad \text{para } x < 25 \end{cases}$$



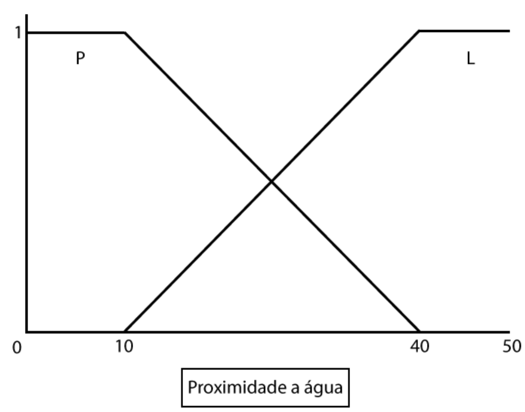
$$P_{TB}(x) = \begin{cases} (75 - X) / 75) & \text{para } x <= 75 \\ 0 & \text{para } x > 75 \end{cases}$$

$P_{UA}(x) = X / 100$



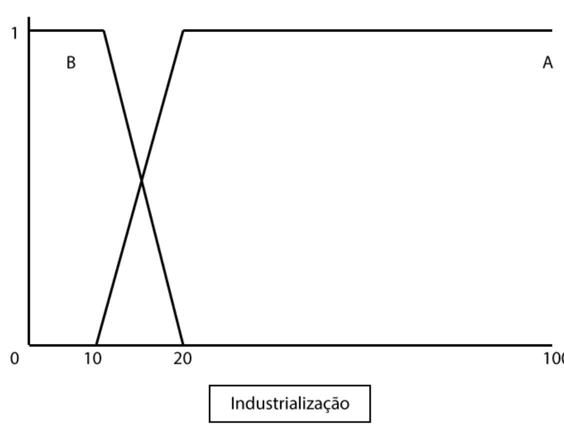
$P_{UB}(x) = 1 - (X / 100)$

$$P_{PP}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } X < 10 \\ (40 - X) / 30 & \text{para } 10 <= X < 40 \\ 0 & \text{para } X >= 40 \end{cases}$$



$$P_{PL}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } X < 10 \\ (X - 10) / 30 & \text{para } 10 <= X < 40 \\ 1 & \text{para } X >= 40 \end{cases}$$

$$P_{IA}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } X < 10 \\ (X - 10) / 10 & \text{para } 10 <= X < 20 \\ 1 & \text{para } X >= 20 \end{cases}$$



$$P_{IB}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } X < 10 \\ (20 - X) / 10 & \text{para } 10 <= X < 20 \\ 0 & \text{para } X >= 20 \end{cases}$$

DEFININDO AS REGRAS NEBULOSAS

Estas regras, ao contrário das usadas por sistemas especialistas tradicionais, são expressas em termos vagos do português e não definem pontos de corte ou limiares, mas, em vez disso, usam termos subjetivos como “alto” e “baixo”:

Regra 1: SE a temperatura for alta
E a umidade for alta
E a proximidade da água for perto
E a industrialização for baixa
ENTÃO a dose de quinino será alta

Regra 2: SE a industrialização for alta
ENTÃO a dose de quinino será baixa

Regra 3: SE a umidade for alta
E a temperatura for alta
E a industrialização for baixa
OU a proximidade da água for perto
ENTÃO a dose de quinino será alta

Regra 4: SE a temperatura for baixa
E a umidade for baixa
ENTÃO a dose de quinino será muito baixa

RELATANDO OBSERVAÇÕES AOS CONJUNTOS NEBULOSOS

Examinaremos cinco conjuntos de dados, para cinco indivíduos, cada um dos quais viajará para um país onde há risco de malária:

temperatura = {80, 40, 30, 90, 85}
umidade = {10, 90, 40, 80, 75}
proximidade a água = {15, 45, 20, 5, 45}
industrialização = {90, 10, 15, 20, 10}

Agora devemos converter esses valores nítidos para valores nebulosos de pertinência, aplicando as funções nebulosas. Por exemplo, alguns cálculos para a primeira pessoa do conjunto de dados:

Temperatura = 80	Umidade = 10	Proximidade = 15	Industrialização = 90
$P_{TA}(80) = (80–25)/75 = 0,733$	$P_{UA}(10) = 10/100 = 0,1$	$P_{PP}(15) = (40-15)/30 = 0,833$	$P_{IA}(90) = 10/100 = 1$
$P_{TB}(80) = 0$	$P_{UB}(10) = 1-(10/100) = 0,9$	$P_{PL}(15) = (15-10)/30 = 0,167$	$P_{IB}(90) = 1-(10/100) = 0$

De forma semelhante, podemos obter valores para os outros quatro viajantes, resultando no seguinte:

$P_{TA} = \{0.733, 0.2, 0.067, 0.867, 0.8\}$ $P_{TB} = \{0, 0.467, 0.6, 0, 0\}$	$P_{UA} = \{0.1, 0.9, 0.4, 0.8, 0.75\}$ $P_{UB} = \{0.9, 0.1, 0.6, 0.2, 0.25\}$
$P_{PP} = \{0.833, 0, 0.667, 1, 0\}$ $P_{PL} = \{0.167, 1, 0.333, 0, 1\}$	$P_{IA} = \{1, 0, 0.5, 1, 0\}$ $P_{IB} = \{0, 1, 0.5, 0, 1\}$

AVALIANDO CADA CASO PELAS REGRAS NEBULOSAS

Vamos examinar o viajante número 1. Os valores são os seguintes:
P_{TA} = 0.733; P_{TB} = 0 / P_{UA} = 0.1; P_{UB} = 0.9 / P_{PP} = 0.833; P_{PL} = 0.167 / P_{IA} = 1; P_{IB} = 0

Pela Regra 1, temos o seguinte:
SE a temperatura for alta (0.733)
E a umidade for alta (0.1)
E a proximidade da água for perto (0.833)
E a industrialização for baixa (0)
ENTÃO a dose de quinino será alta (0) – como tem a cláusula E, pegamos o mínimo dos valores antecedentes

Pela Regra 2:
SE a industrialização for alta (1)
ENTÃO a dose de quinino será baixa (1)

Pela Regra 3:
SE a umidade for alta (0.1)
E a temperatura for alta (0.733)
E a industrialização for baixa (0)
OU a proximidade da água for perto (0.833)
ENTÃO a dose de quinino será alta (0.1):
como tem a cláusula OU, pegamos o maior dos argumentos, e depois o menos deles

Pela Regra 4:
SE a temperatura for baixa (0)
E a umidade for baixa (0.9)
ENTÃO a dose de quinino será muito baixa (0)

Podemos usar esse método para todos os cinco conjuntos de dados de entrada e obter os seguintes resultados:

Regra 1 (dose alta): {0, 0, 0.067, 0, 0}
Regra 2 (dose baixa): {1, 0, 0.5, 1, 0}
Regra 3 (dose alta): {0.1, 0.2, 0.067, 0.8, 0.75}
Regra 4 (dose muito baixa): {0, 0.1, 0.6, 0, 0}

Nesse caso, para combinar as Regras 1 e 3 (dose alta), tomaremos o valor máximo, obtendo, então, os seguintes valores para "dose alta", a partir destas duas regras:

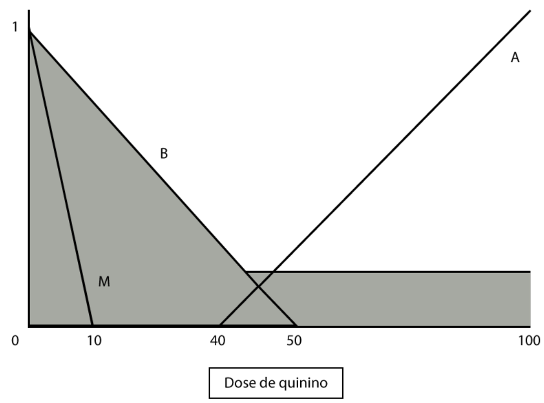
Dose Alta: {0.1, 0.2, 0.067, 0.8, 0.75}

DESFUZZYFICAÇÃO

Agora precisamos desnebulizar as saídas para obter uma recomendação de dosagem nítida para cada viajante. Examinando este processo para o Viajante 1:

O viajante 1 obteve as três saídas nebulosas:
- dose muito baixa (M): 0
- dose baixa (B): 1
- dose alta (A): 0.1

Para desfuzzyficar a saída, usamos a operação de corte, conforme mostrado no gráfico a seguir. Neste caso, cortamos o conjunto M para o valor 0, o que significa que ele não é efetivamente usado mesmo. Cortamos o conjunto B para o valor de 1, o que significa que não será cortado e cortamos o conjunto A para o valor 0.1. A área sombreada é o resultado combinado dos três conjuntos nebulosos e obter o centroide desta área nos dará a recomendação de dosagem para esse viajante (valor de saída nítido).



Para definir o centro de gravidade:

$$C = \frac{\sum PA(X)X}{\sum PA(X)}$$

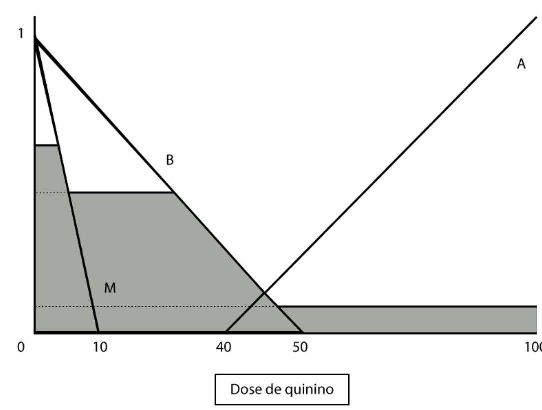
Vamos somar a partir de valores de X que aumentarão em incrementos de 5. Um resultado mais preciso poderia ser obtido usando incrementos menores. Assim,

Aplicando os valores nas funções de pertinência:

C = (0.9 x 5) + (0.8 x 10) + (0.7 x 15) + (0.6 x 20) + (0.5 x 25) + (0.4 x 30) + (0.3 x 35) +
(0.2 x 40) + (0.1 x 45) + (0.1 x 50) + (0.1 x 55) + (0.1 x 60) + (0.1 x 65) + (0.1 x 70) +
(0.1 x 75) + (0.1 x 80) + (0.1 x 85) + (0.1 x 90) + (0.1 x 95) + (0.1 x 100) /
0.9 + 0.8 + 0.7 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1+0.1+0.1+ 0.1
C = 165 / 5.6
C = 29.46 (Dose recomendada para o viajante 1)

O viajante 3 obteve as três saídas nebulosas, gerando o seguinte gráfico:
- dose muito baixa (M): 0.6
- dose baixa (B): 0.5
- dose alta (A): 0.067

C = (0.6 x 5) + (0.5 x 10) + (0.5 x 15) + (0.5 x 20) +
(0.5 x 25) + (0.4 x 30) + (0.3 x 35) + (0.2 x 40) +
(0.1 x 45) + (0.067 x 50) + (0. 067 x 55) +
(0. 067 x 60) + (0. 067 x 65) + (0. 067 x 70) +
(0. 067 x 75) + (0. 067 x 80) + (0. 067 x 85) +
(0. 067 x 90) + (0. 067 x 95) + (0. 067 x 100) /
0.6 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.067 +
0.067 + 0.067 + 0.067 + 0.067 + 0.067 + 0.067 + 0.067 +
0.067 + 0.067 + 0.067
C = 128 / 4.3
C = 29.58 (Dose recomendada para o viajante 3)



“E a nova filosofia põe tudo em dúvida,
O elemento de fogo está completamente fora;
O sol está perdido e a terra e nenhum testemunho humano
Pode bem direcioná-lo a onde procura-lo.
(*An Anatomy of the World,* John Donne)”